Bonusuppgift LANA, Block 2 Uppg. 9

Simon Sigurdhsson

7 maj 2009

1 Rävar vs. Kaniner

Skillnaden mellan dessa situationer ser man först när man tar fram egenvärdena hos den matris som motsvarar problemet:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\delta & \gamma \end{bmatrix} \tag{1}$$

- $\gamma = 1{,}4$: $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_2 = 1$, $v_1 = \begin{pmatrix} -0.1240 \\ -0.9923 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -0.0995 \\ -0.9950 \end{pmatrix}$
- $\gamma = 1{,}5$: $\lambda_1 = 0{,}77639$, $\lambda_2 = 1{,}2236$, $v_1 = \begin{pmatrix} -0.1780 \\ -0.9840 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -0.0689 \\ -0.9976 \end{pmatrix}$
- $\gamma = 1{,}3$: $\lambda_{1,2} = 0{,}9 \pm 0{,}2i$, $v_{1,2} = \begin{pmatrix} 0.0994 \mp 0.0497i \\ 0.9938 \end{pmatrix}$

Då $\gamma = 1{,}4$ stabiliseras problemet eftersom alla egenvärden är ≤ 1. Speciellt är det andra egenvärdet exakt 1 vilket gör att populationerna konvergerar mot ett värde som är $c_2 v_2$, och i det här fallet är $c_2 = -1{,}7085$.

I fallet $\gamma = 1{,}5$ har vi två egenvärden, där ett av dessa är större än ett. Detta gör att populationen kommer att divergera i alla fall där x_2 (antalet kaniner) är skilt från noll. Då tiden går mot oändligheten kommer båda populationerna växa med en faktor λ_2, dvs. det egenvärde som är större än ett.

Det sista fallet är lite mer komplext, men då alla egenvärden har ett absolutbelopp ≤ 1 så kommer båda populationerna konvergera mot noll. Modellen är dock orealistisk då antalet kaniner flera gånger blir negativt.

2 Fasporträtt

I fall 1 rör iterationerna sig längs en linje från punkten $(20;500)$ i samma riktning som v_1 (som blir kortare varje iteration), tills den når slutvärdet $(170;1700)$. Detta eftersom v_2 i princip är en “konstant”, med lämpligt c_2 så att den blir lagom lång, medans v_1 som sagt blir kortare och till slut försvinner. Om man då plottar $v_1 + v_2$ vid varje iteration kommer det att bli en rät linje, som i det här fallet har ekvationen $y = 8x + 340$ och är definierad på $[20, 170]$.