

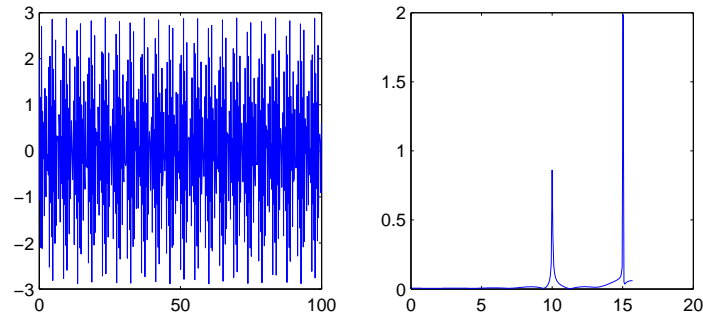
Signalanalys med FFT

Dundar Gök, `dundar@student...`
Soheil Bashirinia, `bashirin@student...`
Simon Sigurdhsson, `ssimon@student...`

2 mars 2010

1.1 Ett första möte med fft

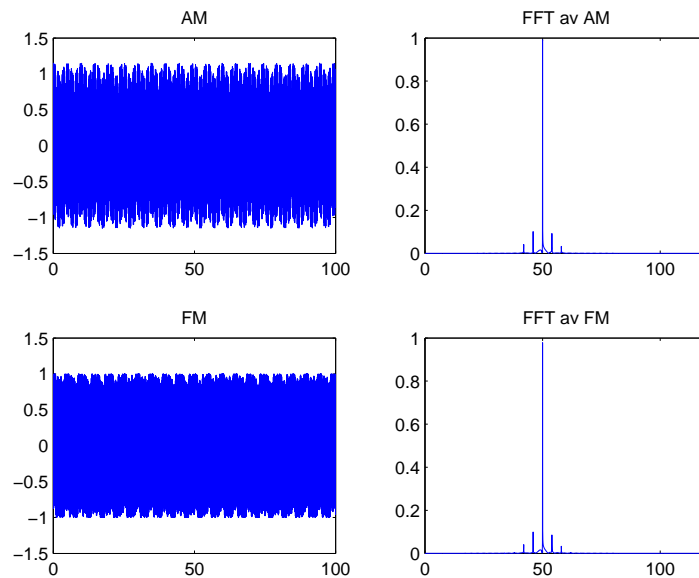
I den första uppgiften har vi helt enkelt följt instruktionerna, utgått ifrån MATLABs hjälpfil och fått fram en enkel bit kod som löser problemet åt oss. Något lite klurigt med den här uppgiften är att man måste skala utdatan från FFT i X-led, eftersom den givna funktionen inte kommer att ge utslag vid frekvenserna 10 och 15, utan vid $\frac{10}{2\pi}$ och $\frac{15}{2\pi}$ — vi måste därför skala utdatans X-axel med en faktor 2π . När vi gjort detta får vi resultatet som kan ses i Figur 1; två fina toppar vid 10 och 15 med amplituder 1 och 2, precis som originalfunktionen anger.



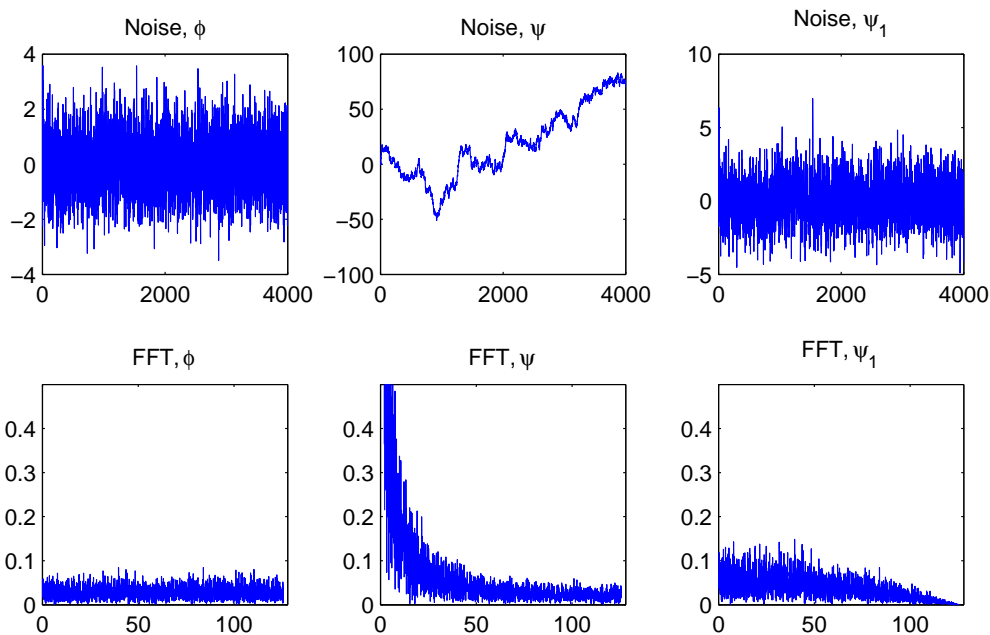
Figur 1: Signalen $\sin(10t) + 2\cos(15t)$ och dess fouriertransform

1.2 Signalmodulation

För att lösa den här uppgiften har vi använt i princip samma kod som i 1a, med utbytta funktioner. Som man kan se av Figur 2 så ger både AM- och FM-modulerad data samma fouriertransform. Detta är ju givetvis bra eftersom datan inte ska bero på metoden man sänder den med. Man ser en mycket fin topp vid 50.



Figur 2: Fouriertransformen av amplitudmodulation (AM) och frekvensmodulation (FM)



Figur 3: De tre olika typerna av brus samt deras fouriertransformer

2.1 Transformen av brus

När man transformerar brus får man, inte helt oväntat, även brus i transformen. Med det normalfördelade bruset i Φ får vi ett jämnt fördelat brus i transformen, men som synes i Figur 3 ger Ψ och Ψ_1 lite annorlunda transformen. Man kan se att Ψ har mycket lågfrekvent brus och lite högfrekvent, medans Ψ_1 knappt har något högfrekvent brus alls (eller; det avtar mycket fortare). Av dessa grafer borde man kunna skissa fram hur ett eventuellt filter borde se ut; ett som ska filtrera bort högfrekvent brus borde kanske se lite ut som formeln till Ψ_1 och ett som ska filtrera bort lågfrekvent brus borde vara raka motsatsen till Ψ .

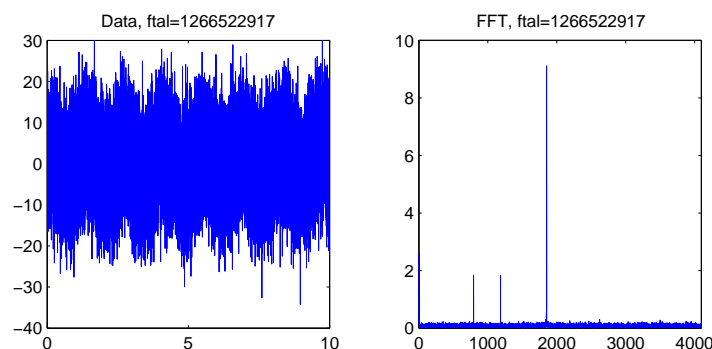
2.2 Signaler i bruset

När man börjar skicka signaler som påverkas av brus kan man ibland se originalfrekvenserna efter en snabb fouriertransform. I Figur 4 har vi fouriertransformerat vår data (som har motsvarande `ftal=1266522917`) och fått fram några fina toppar.

För att få fram de exakta frekvenser som topparna ligger vid (se Tabell 1) har vi lekt runt lite i MATLAB; vi klipper alla värden med amplitud ≤ 1 (det framgår av grafen att det inte finns

Tabell 1: Amplitud och frekvens för toppar i transformen

Frekvens	Amplitud
4.295	2.6
4.909	1.7
794.0	1.8
1185	1.8
1853	1.5
1854	9.1

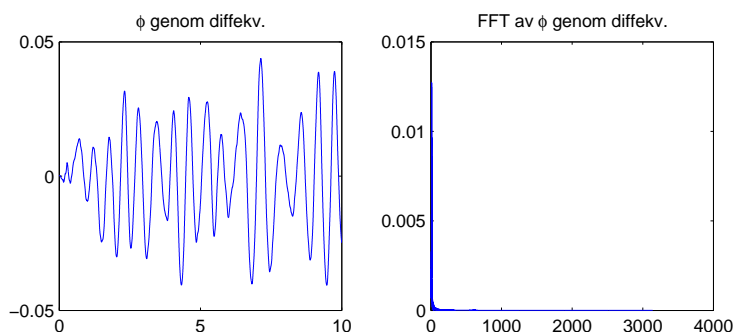


Figur 4: Den brusiga originalsignalen och dess (tydliga) fouriertransform

några viktiga toppar med så liten amplitud), sedan återkopplar vi detta till värdena från FFT för att få fram de frekvenser topparna ligger vid. Fullständig MATLAB-kod kan göras tillgänglig om intresse finns. Vi misstänker också att värdet vid frekvensen 1853 egentligen hör till frekvensen 1854, men felaktigt plockats upp av vår kod. Detsamma gäller topparna runt 4.5, som ligger misstänkt nära varandra.

2.3 Filtrering av brus

Har man brus kan det vara en bra idé att försöka filtrera bort detta. Det kan man göra med exempelvis den givna differentialekvationen. Vi körde helt enkelt in den givna koden i MATLAB, körde `ode45` på den med det normalfördelade bruset Φ som indata, och fick det resultat som kan ses i Figur 5. Filtret är mycket effektivt och filtrerar bort i princip allt normalfördelat brus, och ger endast en mycket liten topp nära 0.

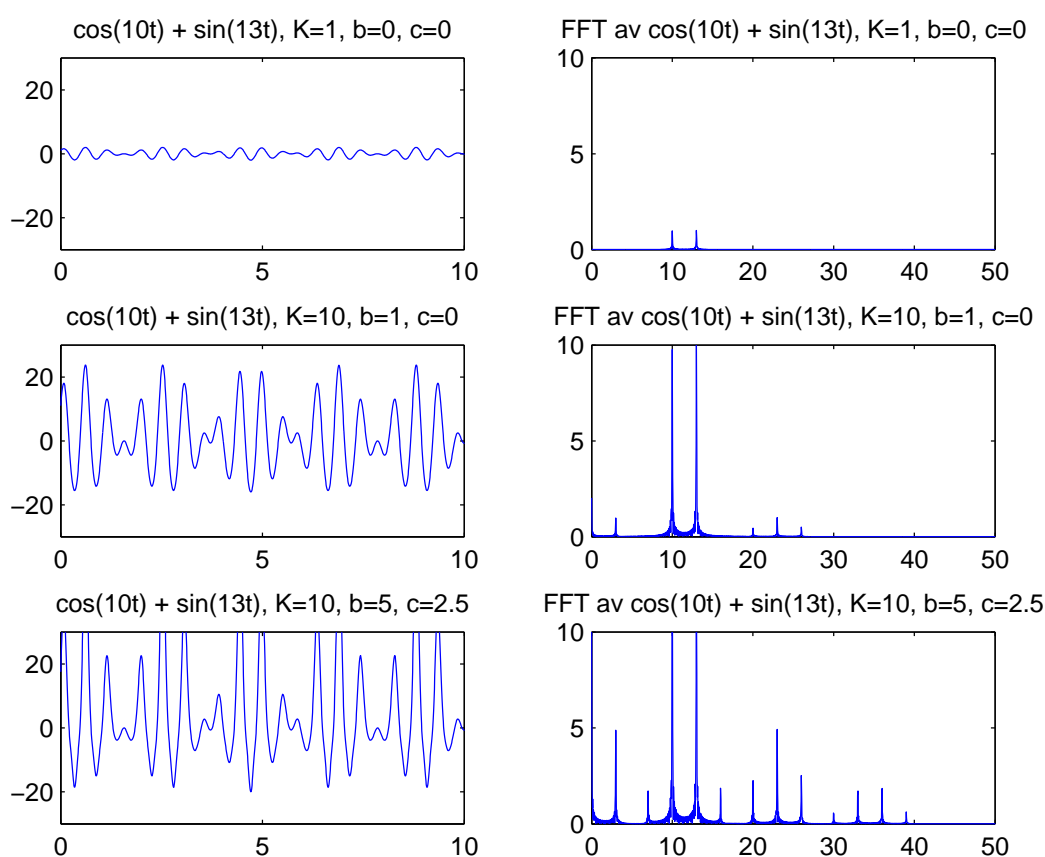


Figur 5: Bruset Φ kört genom filtret (differentialekvationen) samt fouriertransformen av detta

3.1 En icke-ideal förstärkare

En icke-ideal förstärkare kommer att ge störningar som är mer eller mindre förutsägbara. I det här fallet, när förstärkaren fortfarande representeras av ett polynom, kan vi se klara kopplingar mellan originalfrekvens och störning (se Figur 6). I det första fallet har vi $b = c = 0$, dvs. en ideal förstärkare (som i det här fallet inte förstärker eftersom $K = 1$). Ger vi b ett värde, t.ex. 1, så får vi genast störningar vid andra frekvenser. Toppar med amplitud b uppstår vid 3, 20, 23 och 26 — detta helt enligt den funktion man får om man faktiskt sätter in originalsignalen i förstärkaren och använder lite trigonometriska identiteter.

Ger man även c ett värde får man ännu fler toppar. Med $b = 5$, $c = 2.5$ (botten av Figur 6) får vi många olika toppar; dels de som uppstår ur den kvadratiske termen, men även toppar vid 6, 16, 30, 33, 36 och 39 som ges av den kubiska termen. Det hela är relativt förutsägbart och kan fortfarande härledas med hjälp av trigonometriska identiteter.



Figur 6: Originalsignalen, signalen förstärkt med litet b och $c = 0$, samt signalen förstärkt med stort b och måttligt c , och dessa signalers fouriertransformer

3.2 Duffingekvationen

Vår uppgift går ut på att lösa en modifierad version av differentialekvationen i 2.2. Eftersom det är en icke-linjär ordinär differentialekvation av ordning två så finns det inga enkla generella lösningar. I Figur 7 ser vi att det oftast kommer två toppar i frekvensspektrat där den andra toppen alltid uppkommer vid ω . Den första toppens placering beror på olika värden på b (den hamnar i princip vid \sqrt{b}) och väldigt lite på η (η påverkar bara då det är mycket stort i förhållande till b , av storleksordningen tusen gånger större).

Sätter vi $\eta = 0$ kan vi få fram analytiska lösningar som approximerar den lösning vi får när vi har små η :

$$v(t) = \frac{A \cos(\omega t)}{b - \omega^2} + c_2 \sin(\sqrt{b}t) + c_1 \cos(\sqrt{b}t)$$

När b går mot 0 beter sig fouriertransformen som förväntat, b -toppen förskjuts mot 0 vilket är en konsekvens av att v har blivit en funktion av typen $c_1 \cos(\omega t) + c_2 x + c_3$, och därmed fått en "frekvens" på 0Hz. Sätter vi $b = \omega^2$ kommer vi dock att få en singularitet i denna ekvation. Det är dock ett specialfall, som har en helt annan lösning:

$$v(t) = \frac{A \cos(\omega t)}{4\omega^2} + \frac{At \sin(\omega t)}{2\omega} + c_2 \sin(\omega t) + c_1 \cos(\omega t)$$

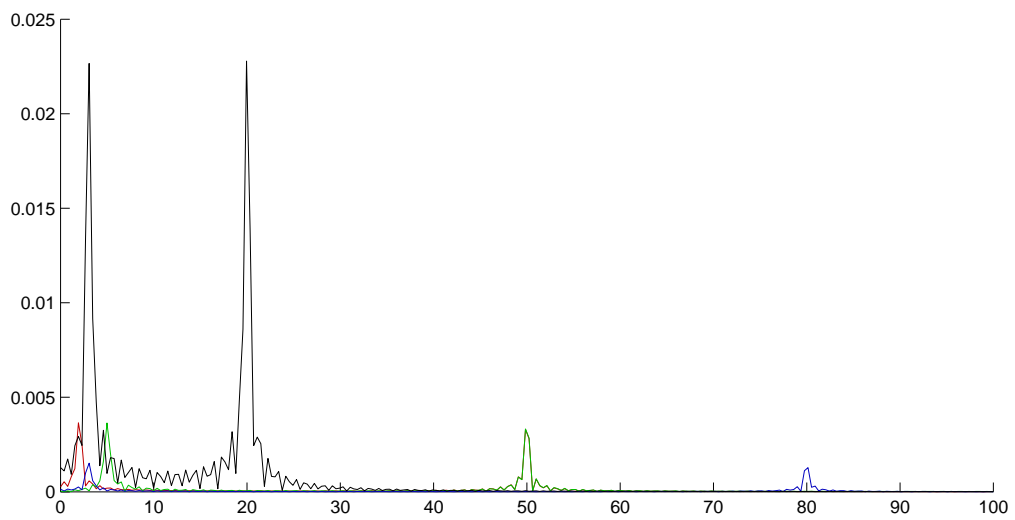
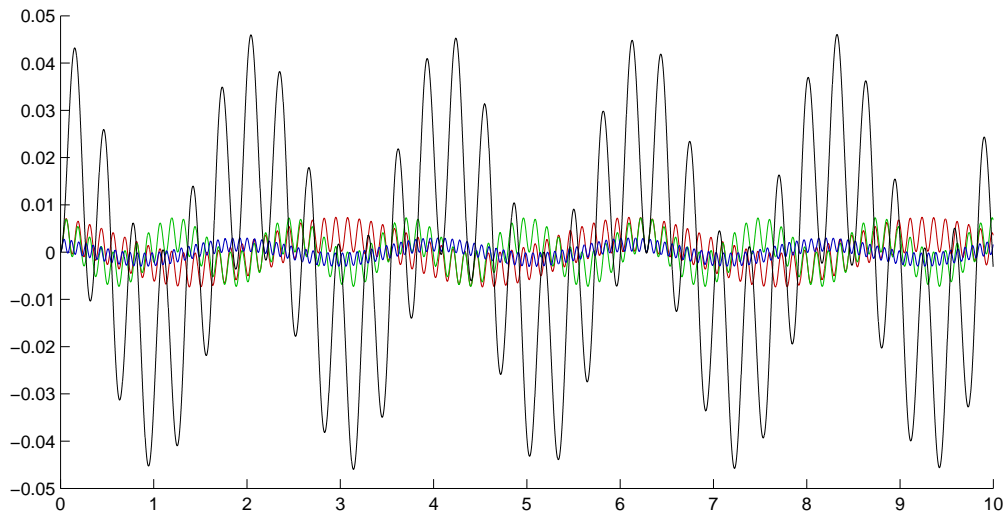
Denna kommer endast att ge en topp vid ω , vilket är helt konsistent med vad vi har sett innan (toppen vid b förskjuts helt enkelt mot ω -toppen, och när de möts får vi en större amplitud vid den frekvensen).

Parametern A påverkar i princip bara amplituden på lösningen, och kan varieras relativt fritt utan att något händer. $A = 0$ är dock en *dålig* idé, eftersom vi så får den triviala lösningen $v(t) = 0$, vilket inte är särskilt intressant.

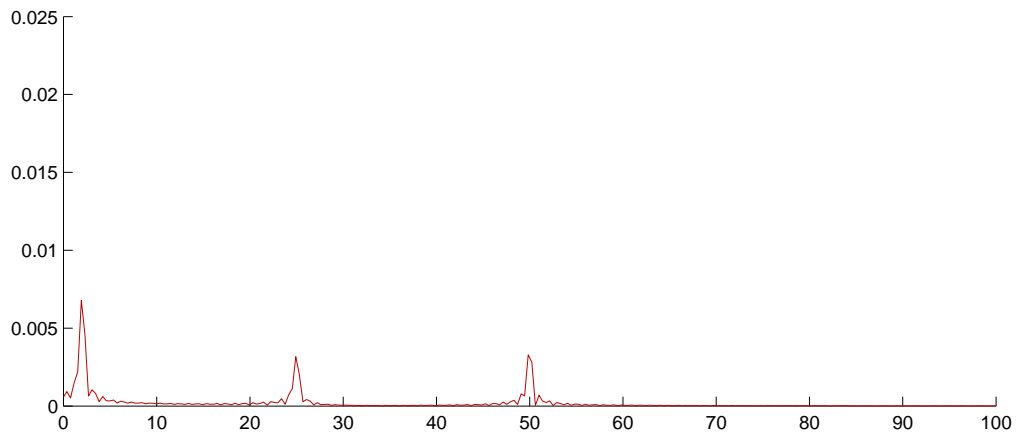
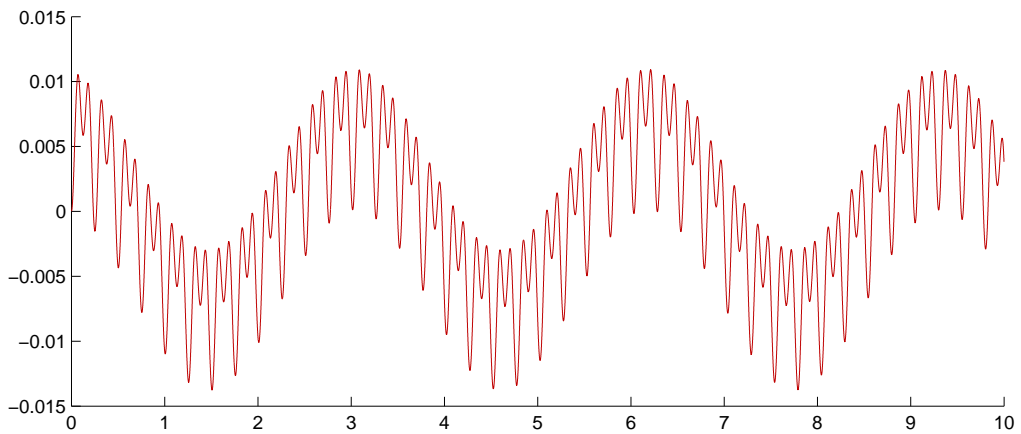
Om vi lägger till en frekvens till i högerledet (se Figur 8) så att vi får ekvationen $v''(t) + bv(t) = A \cos(\omega_1 t) + B \cos(\omega_2 t)$ (vi ignorerar alltså fortfarande η , som inte påverkar särskilt mycket) så får vi en annan analytisk lösning till problemet:

$$v(t) = -\frac{A\omega_2^2 \cos(\omega_1 t) + Ab \cos(\omega_1 t) - B\omega_1^2 \cos(\omega_2 t) + Bb \cos(\omega_2 t)}{(b - \omega_1^2)(b - \omega_2^2)} + c_2 \sin(\sqrt{b}t) + c_1 \cos(\sqrt{b}t)$$

Som vi ser kommer fouriertransformen av denna funktion ha toppar vid exakt ω_1 , ω_2 och \sqrt{b} — vi kan i princip nästan addera transformerna för de funktioner vi fått om vi behandlat högerledets termer separat! Även om vi sätter $\eta \neq 0$ så kommer ekvationen (och dess transform) bete sig på i princip samma sätt, vilket kan ses i Figur 8.



Figur 7: Duffingekvationen och dess fouriertransform. **Svart:** $b = 9$, $\omega = 20$, **Blå:** $b = 9$, $\omega = 80$, **Grön:** $b = 25$, $\omega = 50$, **Röd:** $b = 4$, $\omega = 50$. Alla funktioner har $\eta = 10$ och $A = 9$.



Figur 8: Duffingekvationen med högerledet utbytt mot $A \cos(\omega t) + 2 \cos(\frac{1}{2}\omega t)$. Övriga parametrar är $b = 4$, $\eta = 10$, $\omega = 50$ och $A = 9$.