Värmeledning

Simon Sigurdhsson, TM2

28 september 2009

1 Dirichlet-villkor

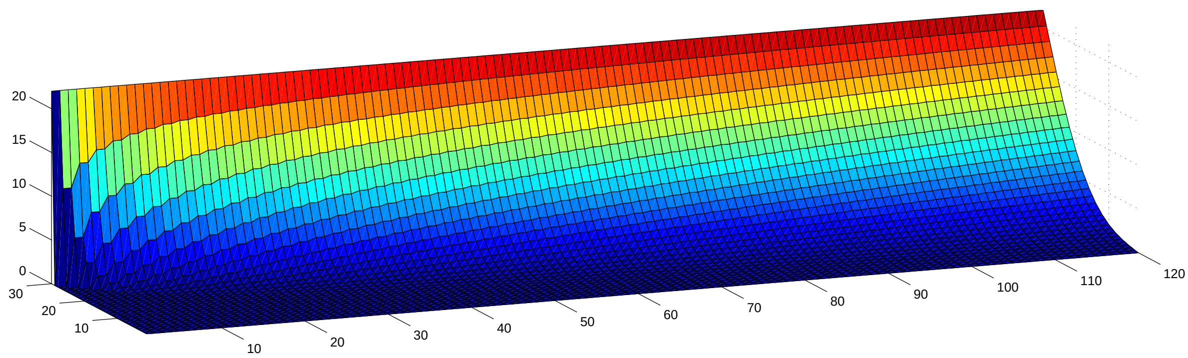
Det här problemet kan enkelt skrivas upp som stegfunktion i MATLAB, som man sedan kan använda i en enkel loop för att få ut värden genom hela väggen för olika tider. Figur 1 visar en `surface`-plot av dessa värden, som visualiserar hur temperaturen i väggen ökar med tiden. Följande ekvation motsvarar MATLAB-funktionen (och kan enkelt härledas från ekvation 6 i labbhandledningen, definitionen av Δt reducerar ekvationen):

$$T_i(T_{n+1}) = T_i(t_n) + 0.5\left(T_{i+1}(t_n) - 2T_i(t_n) + T_{i-1}(t_n)\right)$$

Där $0 \leq i \leq m$ och $T_{-1}(t) = 0$, $T_{m+1} = 22$. Med 30 punkter får vi dessutom $\Delta x = 1.0345$. Följande värden (från *Wolfram Alpha*) användes till konstanterna:

$$\begin{cases} \lambda = 0.378\,\mathrm{W/(mK)} \\ c = 1000\,\mathrm{J/(kgK)} \\ \rho = 1100\,\mathrm{kg/m^3} \end{cases}$$

Vilket ger oss att $\Delta t \approx 155.71$ och därmed får vi veta att vi har beräknat temperaturen från $t = 0$ till $t = 310$ minuter.



Figur 1 Temperaturen i väggen från $t = 0$ till $t = 120\Delta t$.

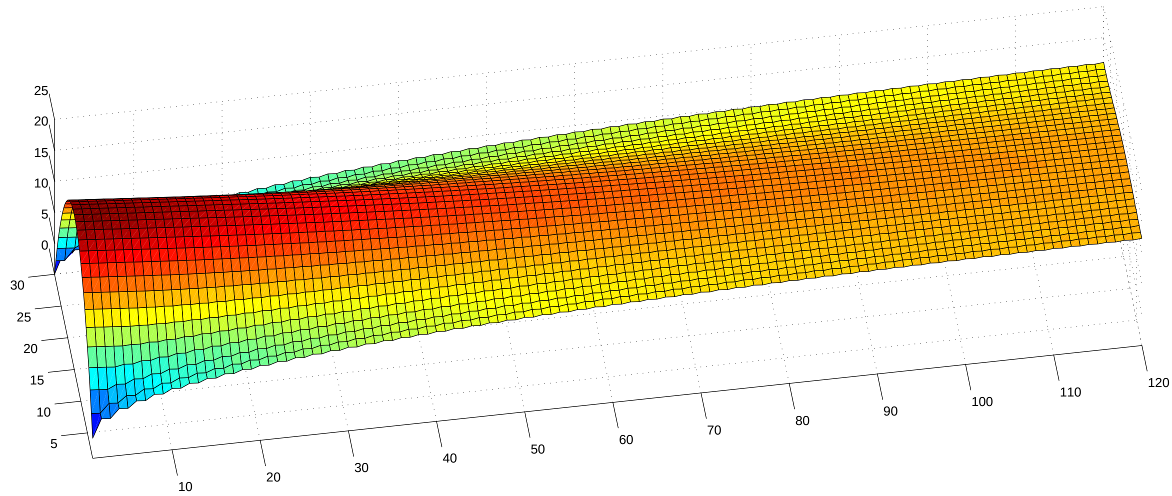
2 Neumann-villkor

Om man ser till att definiera sin funktion på rätt sätt kan man enkelt återanvända den när man sedan skall använda Neumann-villkor. Man byter helt enkelt ut $T_{i+1}(T_n)$ och $T_{i+1}(T_n)$ i ekvationen ovan mot en konstruktion som förskjuter vektorn samtidigt som den ändrar det första eller sista värdet till värdet av en funktion. Dessa funktioner representerar randvillkoren på utsidan och insidan, respektive. Med Neumann-villkoren definieras dessa så här:

$$\begin{cases} T_{\text{inne}}(T) = T_2 \\ T_{\text{ute}}(T) = T_{d-1} \end{cases}$$

Det vill säga värdet i randen sätts till samma värde som elementet innanför, vilket gör att $\partial_x T = 0$ någonstans där emellan, vilket är vad vi vill uppnå.

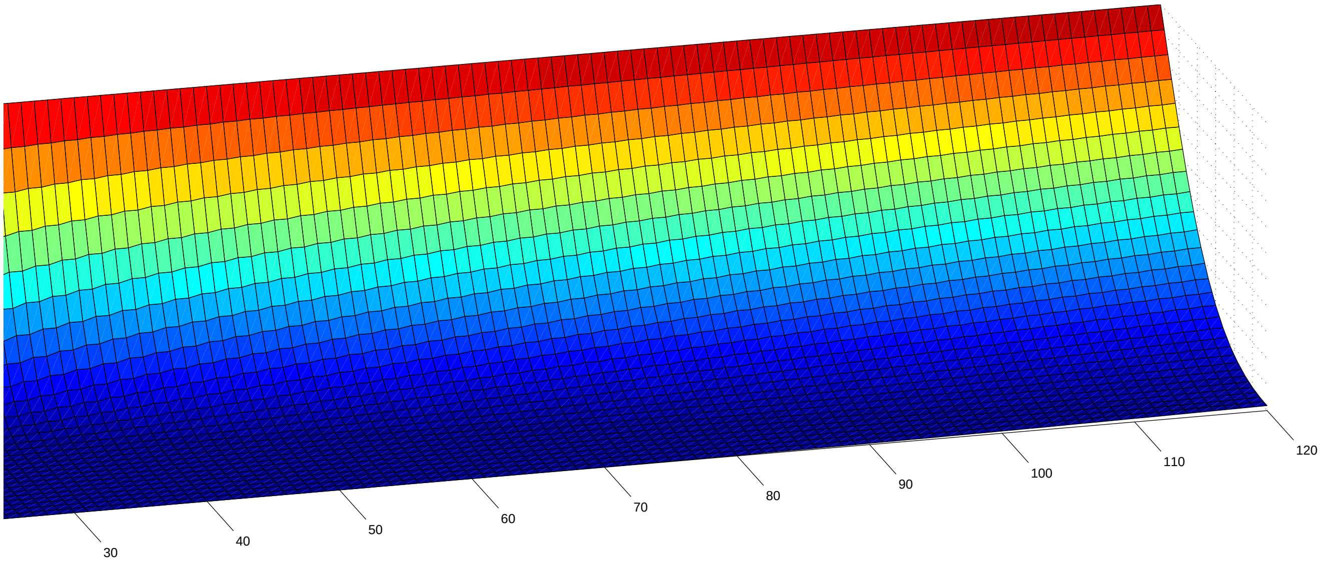
I övrigt kan man notera samma saker som ovan, dvs. att vi får värden från $t = 0$ till $t = 120\Delta t$, vilket motsvarar tid från 0 till 310 minuter.



Figur 2 Temperaturen med Neumannvillkor, över samma tidsintervall som för Dirichletvillkoren.

3 Båda två, samtidigt

Om vi sätter ett Neumann-villkor på utsidan och ett Dirichlet-villkor på insidan beter sig väggen som man kan tro; den ökar på samma sätt som i Uppgift 1, men håller sig inte konstant i ytterkanten. Dock så ökar temperaturen oerhört långsamt i denna änden, så ökningen är knappt synlig.



Figur 3 Med både Dirichlet- och Neumannvillkor kan vi se en lätt ökning av temperaturen i ytterkanten.

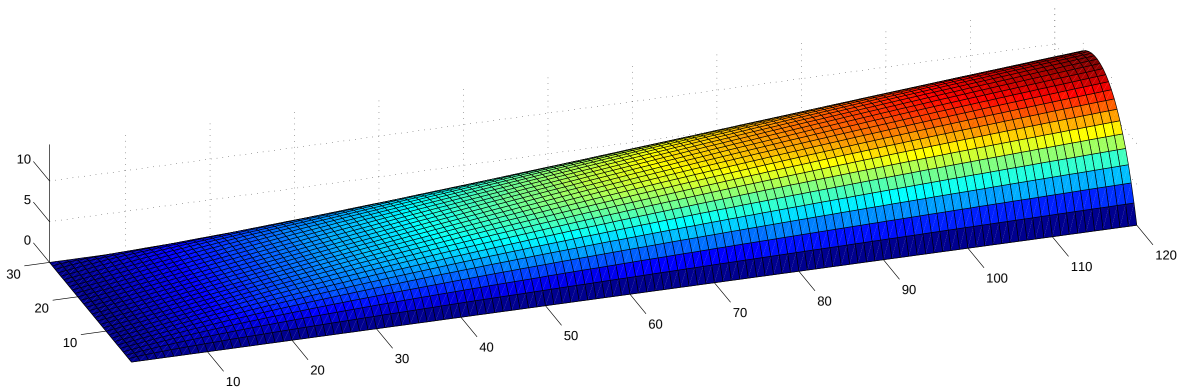
4 Värmekälla

För att simulera en källa i väggen (vi antar att det är en linjekälla) lägger vi till en term i slutet av ekvationen. Denna kommer att bero på en källfunktion:

$$T_i(T_{n+1}) = T_i(t_n) + 0.5\,(T_{i+1}(t_n) - 2T_i(t_n) + T_{i-1}(t_n)) + \Delta t \frac{s(x,t)}{c\rho}$$

Eftersom det är en linjekälla och den är konstant över tiden, kommer $s(x,t)$ att vara en konstant funktion med värdet $1000\mathrm{W/m}^3$. Temperaturen i väggen kommer att försöka öka lika mycket över hela bredden, men randvillkoren förhindrar detta vilket gör att temperaturen kommer att konvergera mot en parabelartad funktion av positionen i väggen.

Tidsskalan är fortfarande densamma, dvs. figuren visar temperaturen över ett spann på ungefär 5 timmar.



Figur 4 Linjekällan gör att temperaturen försöker öka uniformt, randvillkoren motverkar detta.